A propos du "Minimal Controllability Problem"

C. Commault

Département Automatique
Gipsa-Lab Grenoble –FRANCE

Plan de la présentation

- Motivation
- Le problème : les systèmes (modèles) considérés et formulation
- Les systèmes structurés, commandabilité
- Connexion à l’entrée
- Condition de rang
- Conclusion

Motivation

Point de départ, un article

Y. Y. Liu, J. J. Slotine and A. L. Barabasi, ***Controllability of complex networks***, Nature, 2011

Puis de nombreux travaux intéressants

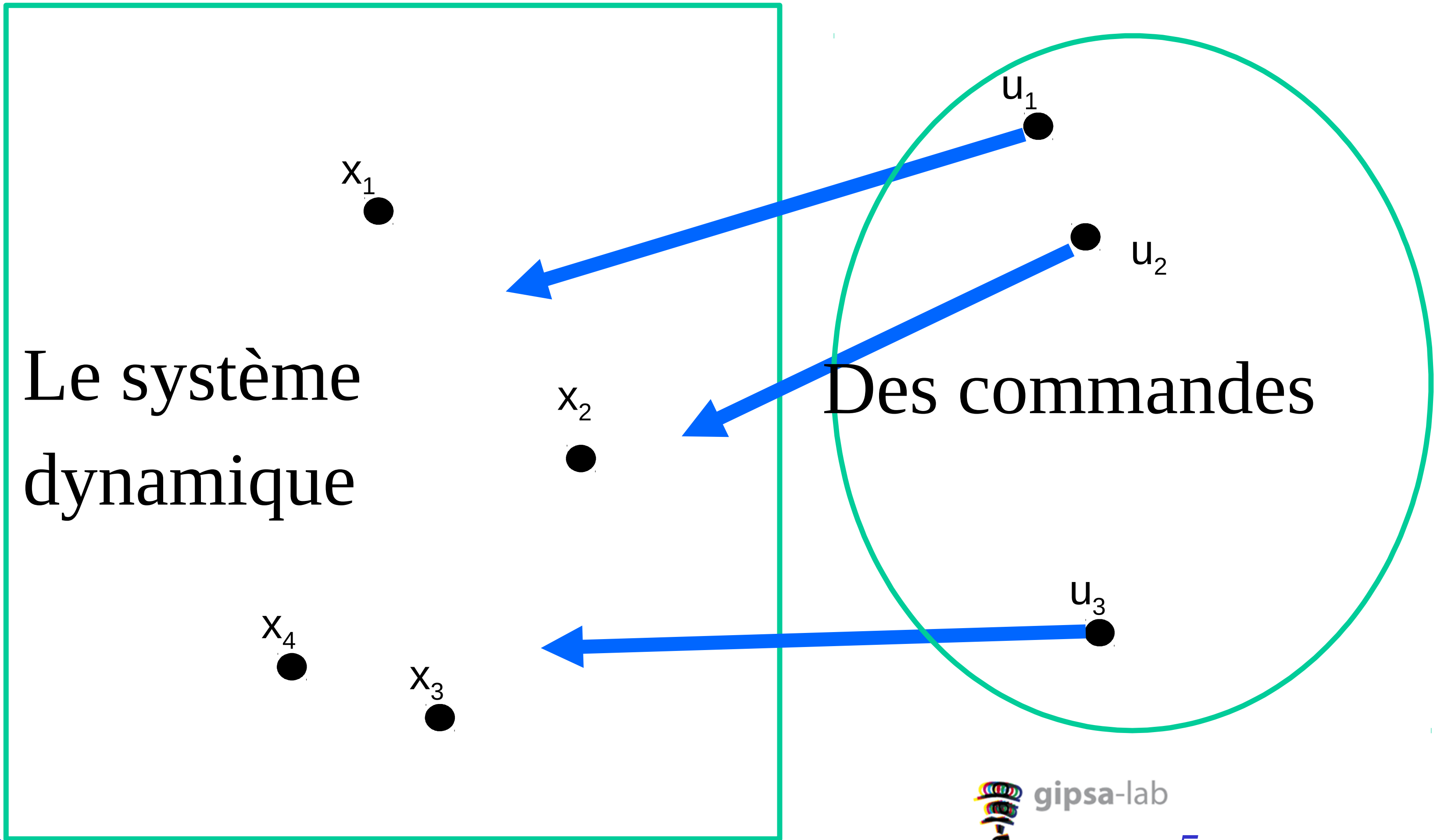
- N. J. Cowan, E. J. Chastain, D. A. Vilhana, J. S. Freudenberg and C. T. Bergstrom, ***Nodal degree, not degree distributions, determine the structural controllability of complex networks***, PLOS ONE, 2012
- A. Olshevsky, *Minimal Controllability Problems*, IEEE Trans. on Control of Network Systems, 2014
- Pequito, S. Kar and P. Aguiar, ***A framework for structural Input/Output and control configuration selection in large-scale systems***, IEEE TAC, 2016

Motivation

On participe au débat

- C. Commault and J. -M. Dion, ***Input addition and leader selection for the controllability of graph-based systems***, Automatica, 2013
- C. Commault and J. -M. Dion, ***The single-input Minimal Controllability Problem for structured systems***, Syst. Cont. Lett., 2015

Le problème



Le problème

On veut ajouter des entrées de façon à rendre le système commandable, mais « en le touchant le moins possible » au sens :

- De l'énergie apportée
- Du nombre d'états touchés,
- Du nombre d'entrées ajoutées,
- ….

Les systèmes considérés

- Grande dimension (états)
- Linéaires invariants dans le temps
- Structure (graphe)
- Domaines d'application très variés (biologie, physique, web, grands réseaux, …)

Formulation plus précise

On considère le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x \in R^n, u \in R^m$$

Où ***A* est donnée**, ***B* doit être choisie** pour que

$$rank \left\lfloor B, AB, \ldots A^{n-1}B \right\rfloor = n$$

Problèmes :

- Combien d'entrées ajouter ?
- Quels états doivent être impactés ?

Formulation MCP
Minimal Controllability Problem

- Une entrée touche un seul état → Dans B un seul élément non nul par colonne
- Variante : B avec un nombre minimum d'éléments non nuls

Pour A donnée, problème NP-difficile

A. Olshevsky, ***Minimal Controllability Problems***, IEEE Trans. on Control of Network Systems, 2014

Autres formulations

Système structuré (graphe)

- Une entrée peut toucher un nombre arbitraire d'états

Y. Y. Liu, J. J. Slotine and A. L. Barabasi, ***Controllability of complex networks***, Nature, 2011

- Une entrée touche des états donnés,

C. Commault and J. -M. Dion, ***Input addition and leader selection for the controllability of graph-based systems***, Automatica, 2013

- MCP Structuré

Pequito, S. Kar and P. Aguiar, ***A framework for structural Input/Output and control configuration selection in large-scale systems***, IEEE TAC, 2016

Systèmes Linéaires Structurés

Systèmes linéaires pour lesquels les éléments des matrices de la représentation d'état sont :

- *Zeros*
- *Paramètres independants*

$$\Sigma_\Lambda \ : \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t)$$

$$u \in R^m, x \in R^n$$

Pourquoi ?

En général on ne connait pas valeur exacte des paramètres, mais plutôt l'existence/absence d'influence entre variables (structure).

Systèmes Lineaires Structurés

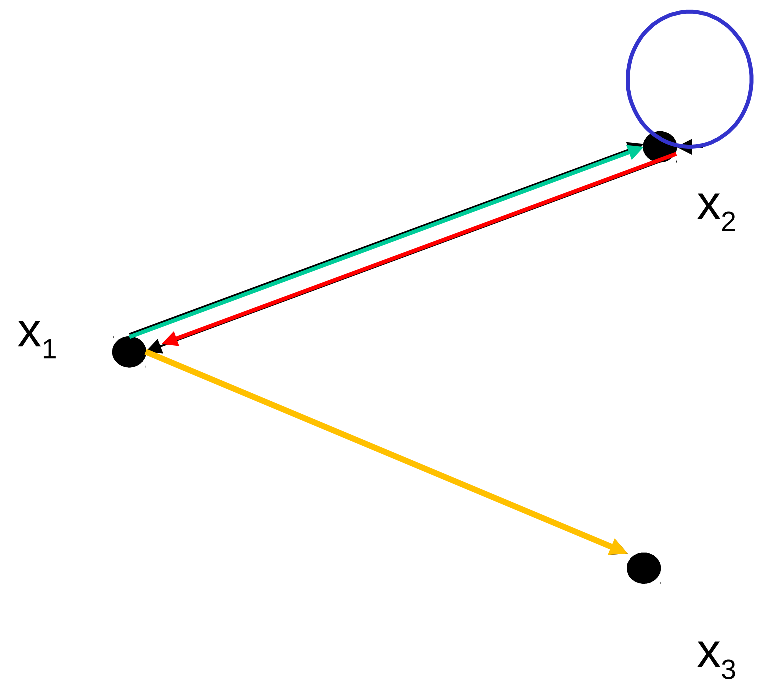
Propriétés génériques : vraies pour presque toute valeur des Paramètres, *i.e.* les valeurs des paramètres pour lesquels la propriété n'est pas vraie appartiennent à une variété algébrique propre dans l'espace des paramètres.

Graphe associé : un sommet par variable, un arc pour un paramètre non nul.

Un exemple simple

3 états, pas d'entrée

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



La condition de commandabilité

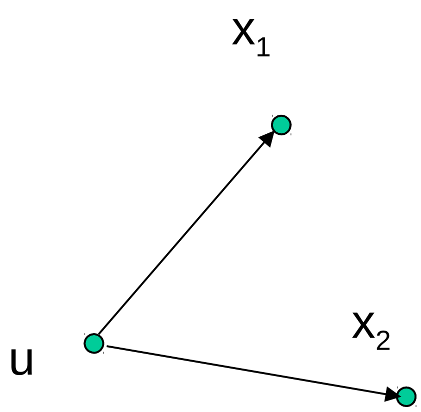
Theorème (Lin, 74)

Un système structuré est génériquement commandable si et seulement si :

- Tout sommet d'état est connecté à une entrée, (connexion à l'entrée)
- Rang générique de $[A,B] = n$, (condition de rang)

Caractérisation de la condition de rang : on peut couvrir les sommets d'état du graphe par un ensemble disjoint de tiges (chemins partant d'une entrée) et de circuits

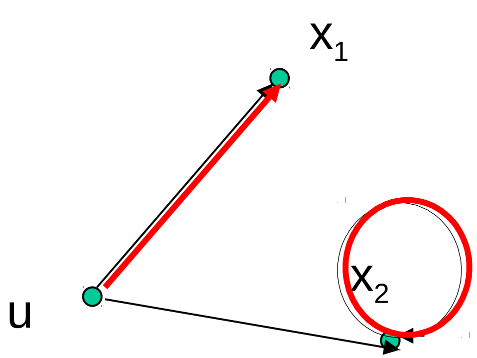
Exemples



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$ Non commandable

LIN : Connexion OK, $\left[A, B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ De rang 1

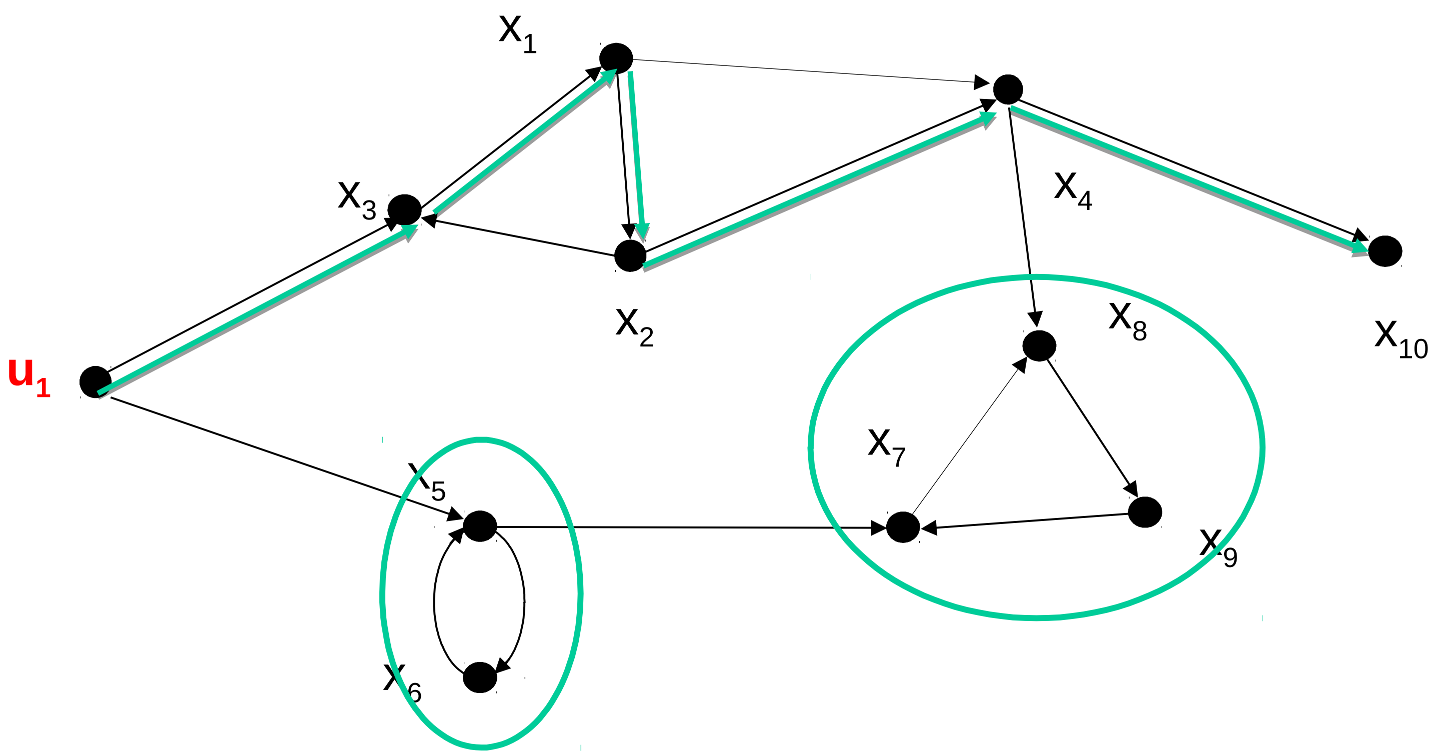


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

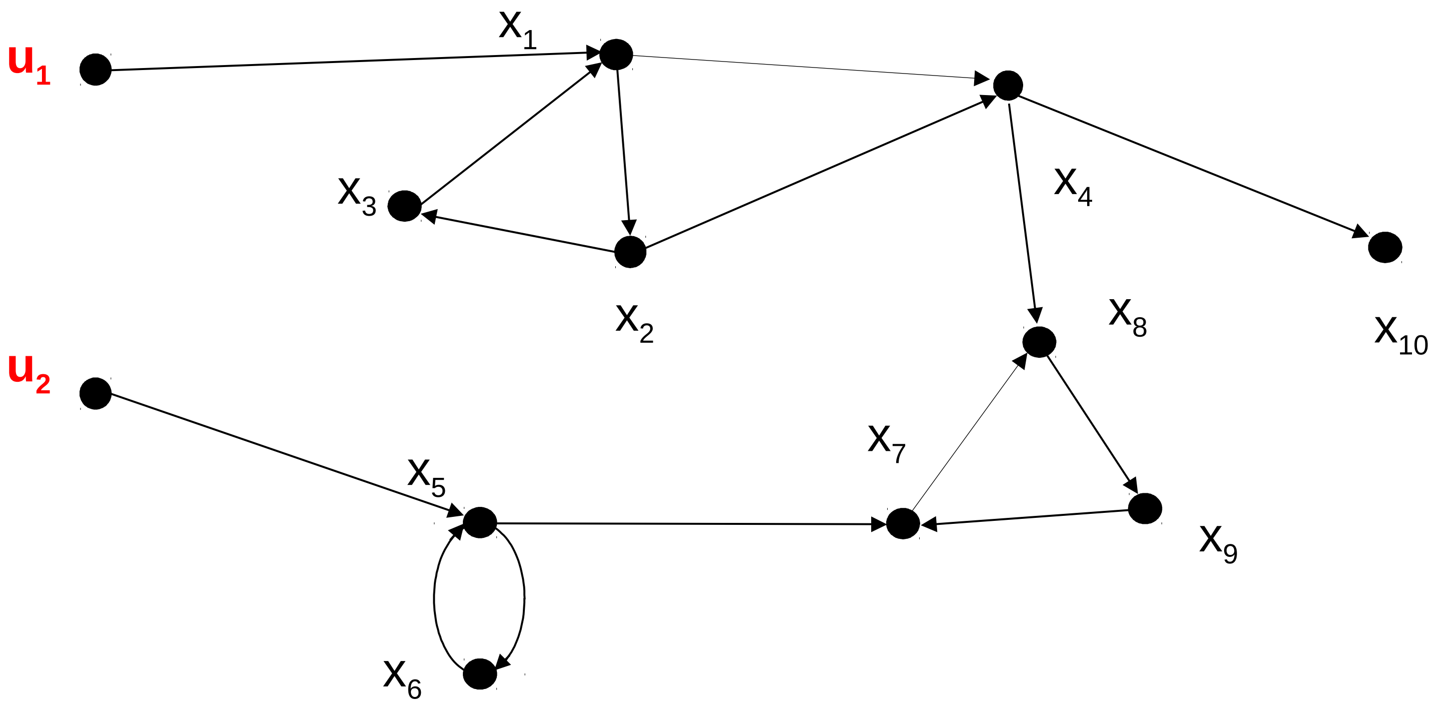
$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix}$$ Commandable

LIN : Connexion OK, $\left[A, B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ De rang 2

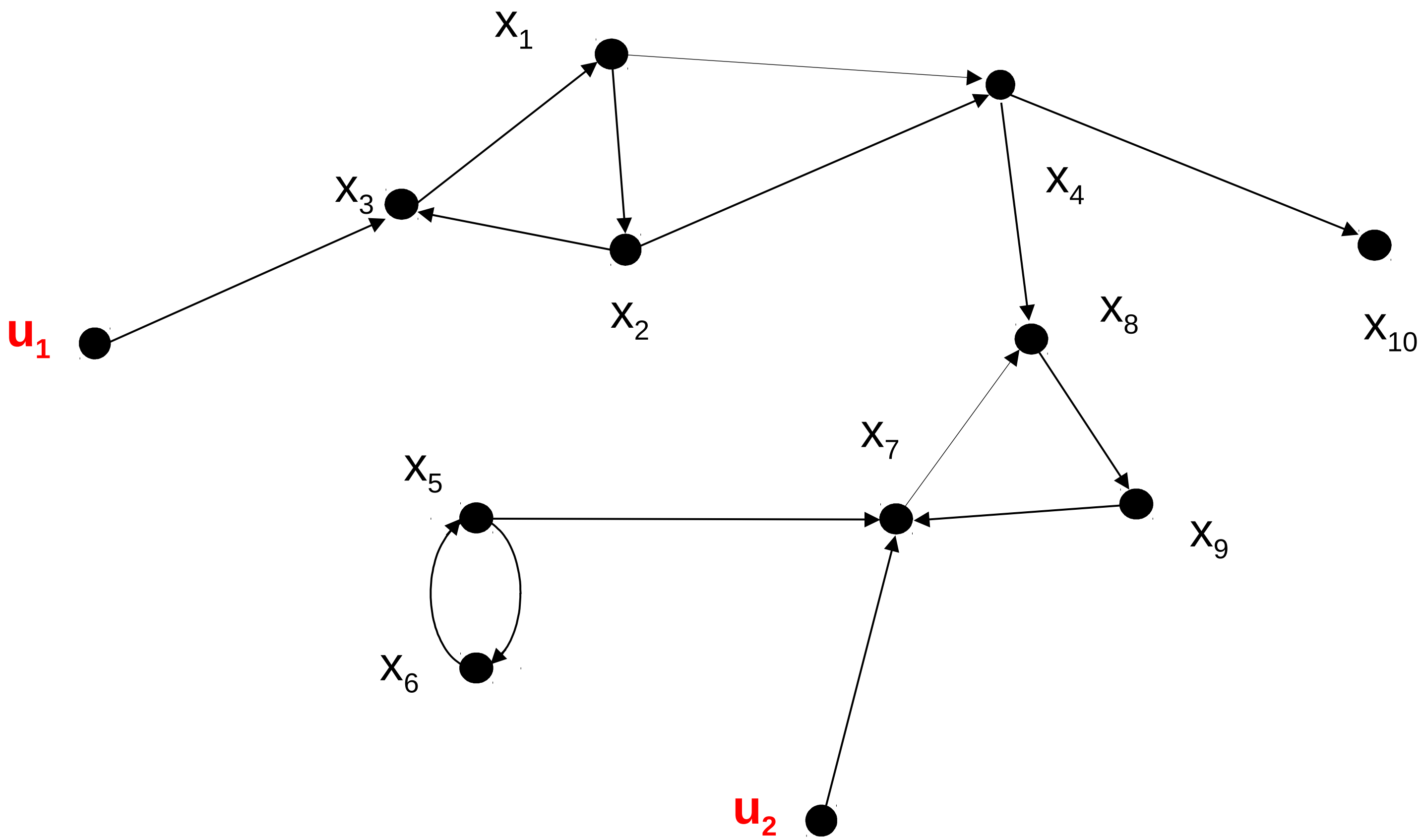
Exercice1



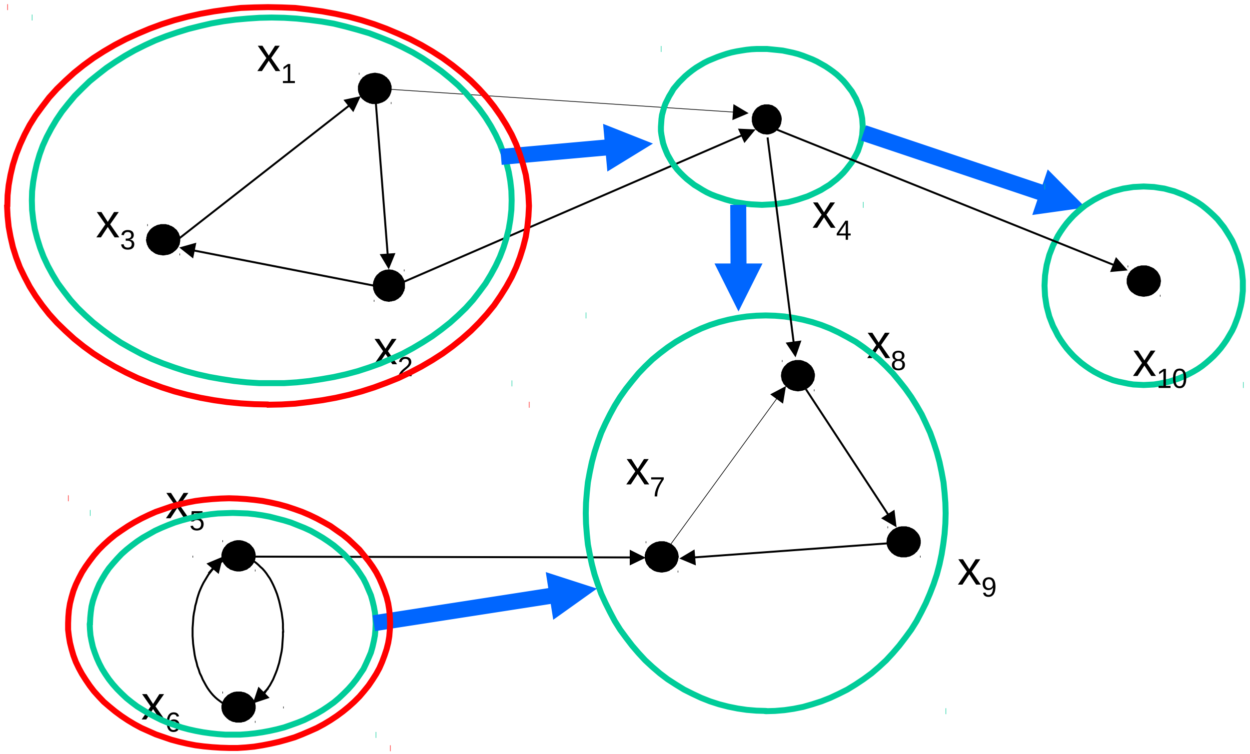
Exercice 2



Exercice 3

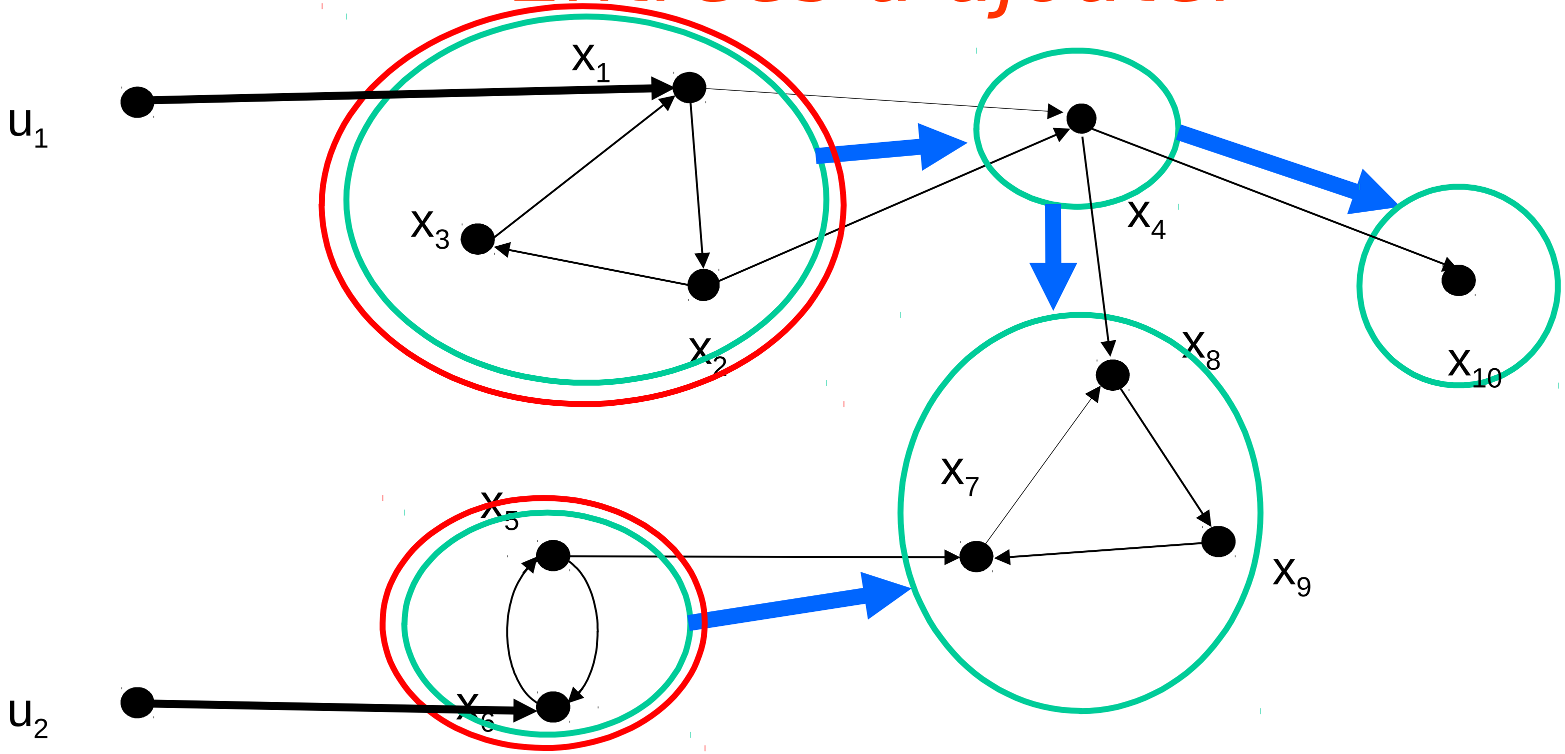


Connexion à l'entrée



- Decomposition en composantes fortement connexes (SCC)
- Ordonner les SCC's
- Composantes Critiques = composantes sans arc entrant
- Défaut de connexion = nombre de composantes critiques = d_c

Entrées à ajouter

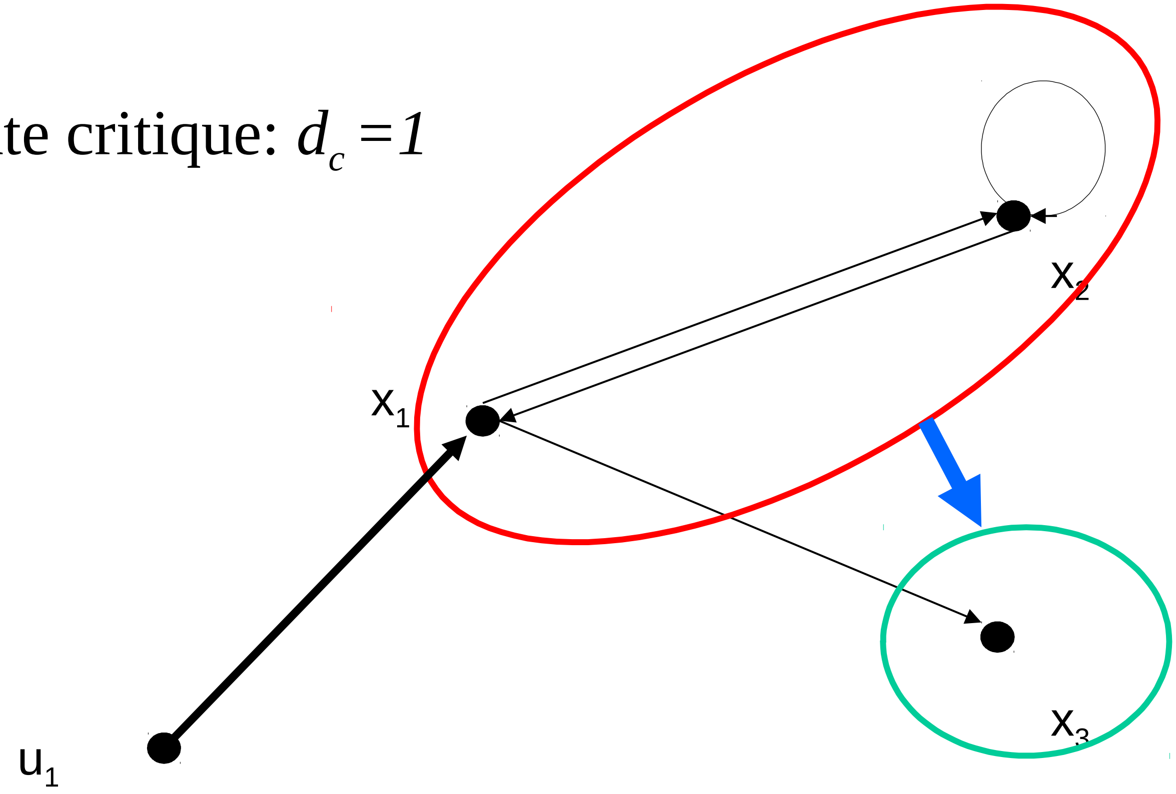


Mettre une entrée dans chaque composante critique

Nombre minimal d'entrées = d_c

Notre exemple

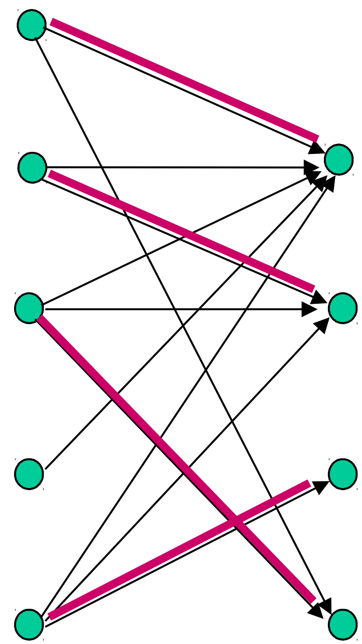
Une composante critique: $d_c = 1$



Rang générique d'une matrice structurée

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_8 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_6 & 0 & \lambda_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graphe biparti associé



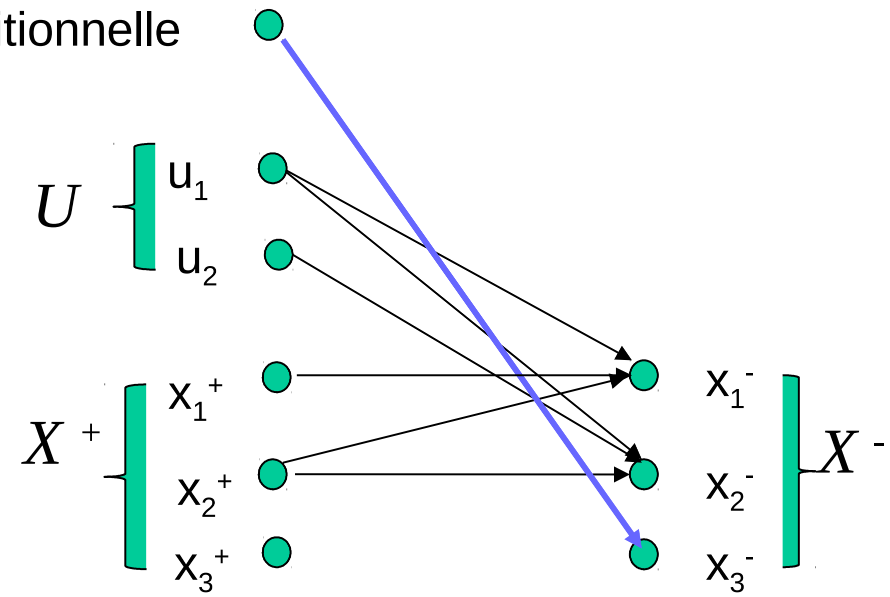
Couplage

Rang générique = taille d'un couplage (matching) maximum dans le graphe biparti associé

Rang générique de [A,B]

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc|cc} & \mathrm{A} & & \mathrm{B} & \end{array} \\
[A,B] = & \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

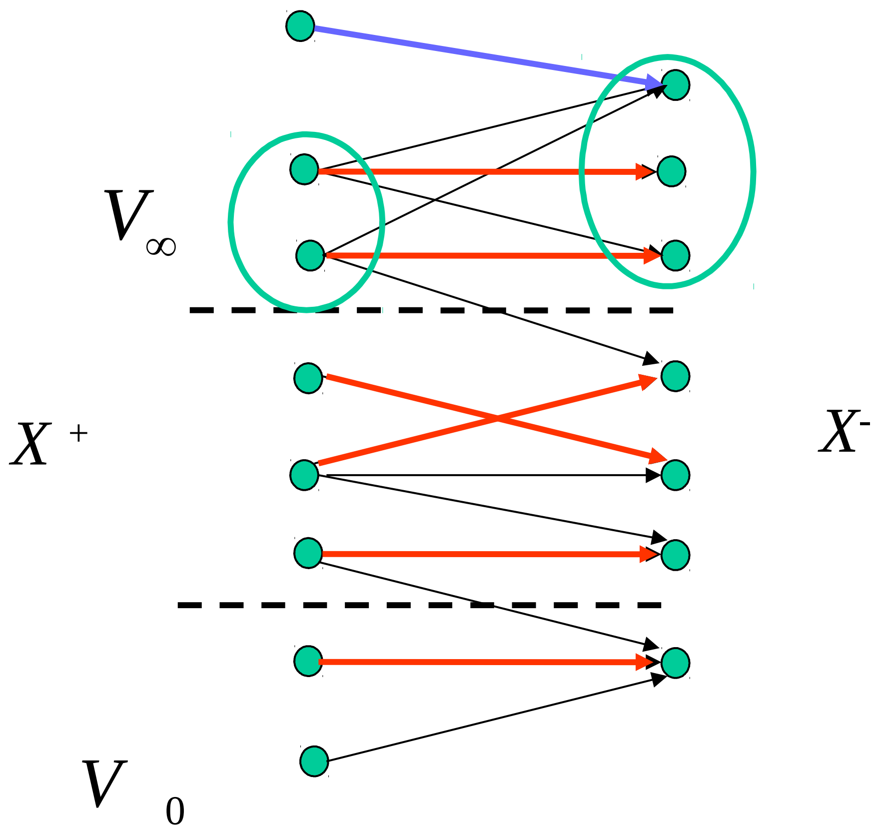
Entrée additionnelle



Decomposition Dulmage-Mendhelson

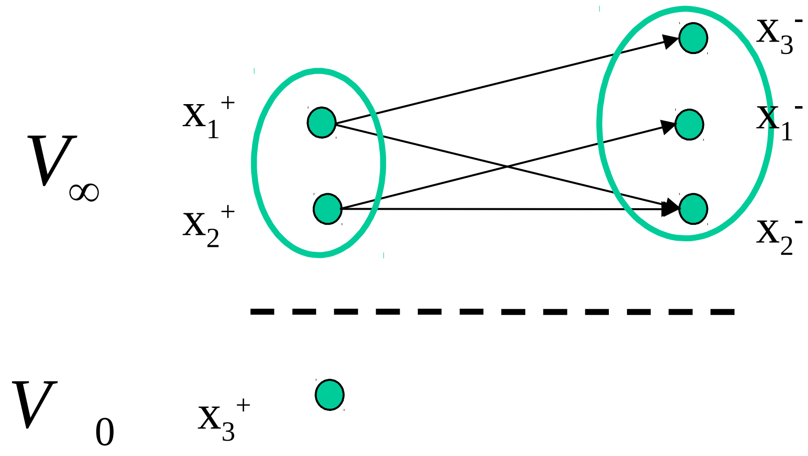
La DM-decomposition permet de paramétrer tous les Couplages maximaux

Défaut de rang= d_r =
n – *rang générique[A]* =
$\dim(V_\infty^-) - \dim(V_\infty^+)$



On peut se contenter d'étudier la partie V_∞

Notre exemple



$$\text{Défaut de rang} = d_r = \dim(V_\infty^-) - \dim(V_\infty^+) = 1$$

Nombre et localisation des entrées

Pour le défaut de connexion: d_c *entrées dans les composantes critiques*

Pour le défaut de rang : d_r *entrées dans la partie* V^-_∞ *du graphe biparti*

Pour la commandabilité: k *entrées avec*

$$Max(d_c, d_r) \leq k \leq d_c + d_r$$

Obtention de k minimum

Des solutions algorithmiques existent

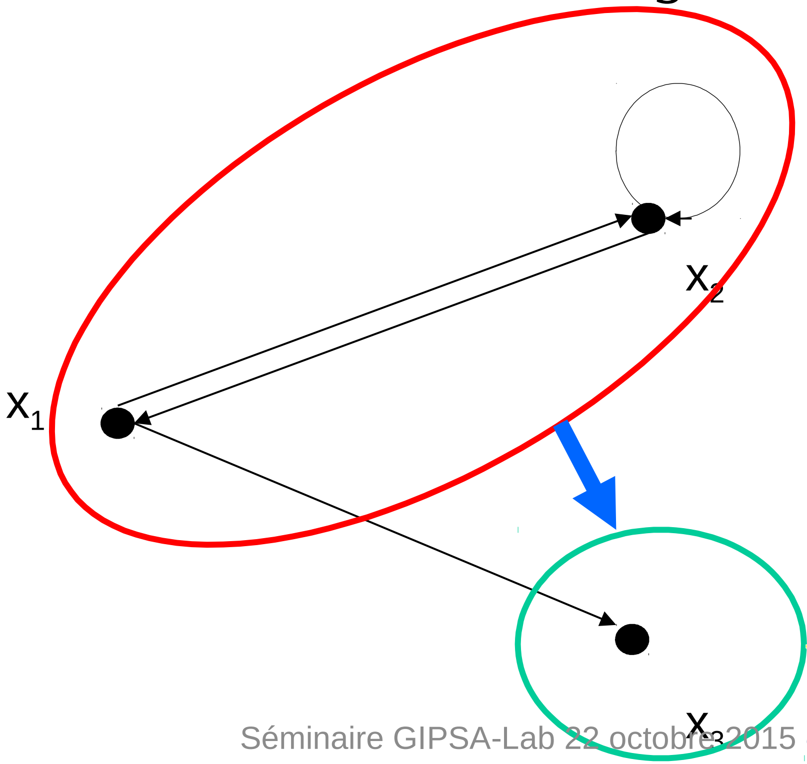
- A. Olshevsky, ***Minimum input selection for structural controllability***, "arXiv.org/abs/1407.2884v2", 2014
- Pequito, S. Kar and P. Aguiar, ***A framework for structural Input/Output and control configuration selection in large-scale systems***, IEEE TAC, 2016
- S Assadi, S. Khanna, Y. Li and V. Preciado, ***Complexity of the Minimum Input Selection Problem for structural controllability,*** DECNS 2015

Notre exemple

Pour la connexion à l'entrée: *une entrée dans le composante critique, agissant sur x_1 ou x_2*

Pour la condition de rang: *une entrée dans la partie* V^-_∞ *du graphe biparti, x_1,x_2 ou x_3*

Pour la commandabilité: *une entrée agissant sur x_1 ou x_2*



Des variantes du problème

Quand les entrées agissent sur :

- des états arbitraires, problème simple,
- de manière prédéterminée sur les états (cas d'un ensemble possible d'actionneurs), problème difficile (et même NP-difficile)

Conclusion

- Un sujet d'actualité
- Approche graphe, résultats presque indépendants des paramètres du système
- Application (non immédiate) aux systèmes multi-agents gérés par consensus